KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

SLUČAJNE PROMJENLJIVE

1. Definicija, diskretne i kontinualne promjenljive
2. Funkcija raspodjele vjerovatnoće slučajne promjenljive
3. Gustina (raspodjele) vjerovatnoće
4. Matematičko očekivanje, varijansa, koeficijent varijacije

P3

Slučajna promjenljiva

- Funkcija X koja svakom elementarnom ishodu (događaju) jednog eksperimenta , pridružuje neki realan broj naziva se **slučajna (aleatorna) promjenljiva X.**
- Primjer slučajnih promjenljivih:
  - broj automobila koji prođu ulicom u toku određenog vremenskog intervala,
  - zbir koji se dobija bacanjem dvije kockice,
  - broj škartova koji mašina proizvede u nekom vremenu,
  - visina i težina čovjeka,
  - veličina greške pri mjerenju neke fizičke osobine,
  - vijek trajanja nekog proizvoda,
  - broj ostvarivanja događaja A u n opita....
- Slučajna promjenljiva:
  - pod uticajem slučajnih okolnosti može uzeti različite brojne vrijednosti
  - potrebno je znati koje vrijednosti može uzeti
  - potrebno je znati i vjerovatnoću da slučajna promjenljiva uzme određenu vrijednost
- Formalna matematička definicija slučajne promjenljive glasi:

*Svako preslikavanje **X** prostora elementarnih događaja S u skup realnih brojeva, takvo da za svaki interval **I** na realnoj pravoj skup svih elementarnih događaja na kojima **X** uzima vrijednosti iz **I** predstavlja jedan slučajan događaj, naziva se **slučajna promenjiva**, X: S→R.*

Skup elementarnih događaja može biti: konačan, prebrojiv ili neprebrojiv

Diskretne i neprekidne slučajne promjenljive

- **Diskretna slučajna promjenljiva** uzima sa pozitivnim vjerovatnoćama konačan broj vrijednosti ili prebrojivo mnogo vrijednosti (da se mogu prebrojati skupom prirodnih brojeva)

  *Slučajna promenjiva X je **diskretnog tipa (diskretna slučajna promenjiva)** ako je njen skup vrijednosti $x_k \in S(X)$ konačan ili beskonačan (ali prebrojiv) niz realnih brojeva.*

- **Neprekidna (kontinualna)** slučajna promjenljiva može da uzme sa pozitivnom vjerovatnoćom proizvoljnu brojnu vrijednost na određenom intervalu. Vjerovatnoća da neprekidna slučajna promjenljiva poprimi pojedinu vrijednost unutar intervala je nula.

  *Slučajna promenjiva X je **neprekidnog tipa (neprekidna slučajna promenjiva)** ako je skup svih vrijednosti koje ona uzima jedan interval na realnoj pravoj (ovaj interval može biti i cio skup R).*

- Da bi se definisala slučana promjenljiva treba znati i njene vrijednosti x_k i vjerovatnoće p_k da X uzme te vrijednosti.
- Funkcionalne karakteristike slučajnih promjenljivih koje jednoznačno određuju slučajnu promenljivu su njihovi zakoni, funkcija i gustina raspodjele.

(1) Skup elementarnih događaja može biti: konačan, prebrojiv ili neprebrojiv

(2) Najčešće, kada je neka pojava podložna mjerenju, kao npr. visina, težina, potrošnja per capita (po glavi stanovnika), temperatura, potrebno vrijeme da se usluži klijent u banci, i slično, pojavu tretiramo kao neprekidnu slučajnu promjenljivu . Navedene promjenljive teorijski mogu uzeti bilo koju vrijednost iz nekog intervala, iako je u praksi broj tih vrijednosti konačan, bilo zbog nesavršenih mjernih instrumenata ili činjenice da nam u konkretnom istraživanju savršena preciznost nije potrebna.

Diskretne i neprekidne slučajne promjenljive

- **Primjer 1**. Neka je eksperiment bacanje dvije kocke istovremeno. Elementarnim događajima možemo pridružiti realan broj koji odgovara zbiru palih brojeva. To pridruživanje je slučajna promjenljiva X sa vrijednostima u skupu S (X) ={2,3.....12} , a vjerovatnoća da X uzme konkretnu vrijednost iz skupa S odgovara vjerovatnoći da se pojavi odgovarajući slučajni događaj.

- **Primjer 2.** Eksperiment je bacanje tri novčića. Neka je karakteristika eksperimenta, odnosno slučajna promjenjiva X-Broj palih grbova. Skup elementarnih događaja je S={ PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG}. Broj palih grbova može biti: 0,1,2 ili 3, pa je X(S)={0,1,2,3}- skup vrijednosti slučajne promjenjive X (konačan niz brojeva), a vjerovatnoće odgovaraju vjerovatnoći da u bacanju bude ostvaren događaj pojave: 0 grbova (za x_0=0), 1 grb (za x_1=1), 2 grba (za x_2=2), 3 grba (za x_3=3).

- **Primjer 3.** Neka je eksperiment godišnje poslovanje jednog preduzeća. Neprekidna slučajna promjenljiva X se može definisati kao odnos profita i prodaje u jednoj godini. Prema tome, slučajna promjenljiva nema određeni broj mogućih ishoda, pa je to promjenljiva neprekidnog tipa. Da bi se ova X definisala, moramo znati njene vrijednosti x_k i vjerovatnoću da uzme vrijednosti iz nekog intervala I.

Diskretna slučajna promjenljiva

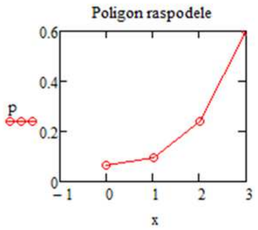
A. ***Diskretna slučajna promjenljiva*** *uzima sa pozitivnim vjerovatnoćama konačan broj vrijednosti ili prebrojivo mnogo vrijednosti, pa je za definisanje ove promjenljive potrebno znati vrijednosti* x_k *i odgovarajuće vjerovatnoće* p_k.

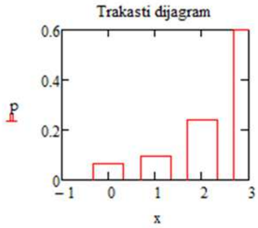
- Skup uređenih parova čiji prvi član predstavlja vrijednost $\boldsymbol{x_k}$ ϵS(X) slučajne promjenljive X, a drugi član predstavlja vjerovatnoću $\boldsymbol{p_k = P(X = x_k)}$ da slučajna promjenljiva X uzme pomenutu vrijednost $\boldsymbol{x_k}$ naziva se **raspodjela vjerovatnoće slučajne promjenljive X.**

  (x_k , p_k) , pri čemu je $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$**,** za svako *k=1,2,....n, ,* a prikazuje se šemom:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \; \ldots\ldots \; x_n \\ p_1 \; p_2 \; \ldots\ldots \; p_n \end{pmatrix}, \; \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

- Raspodjela vjerovatnoće se može grafički prikazati poligonom raspodjele vjerovatnoće ili stubičastim dijagamom*





*izvor: http://www.tf.uns.ac.rs/~omorr/radovan_omorjan_003_is/Mcad15/Teorija vjerovatnoce, slucajne promjenljive.html

Raspored vjerovatnoća ne smijemo poistovećivati sa rasporedom frekvencija. Raspored vjerovatnoća je teorijski model koji pridružuje vjerovatnoće pojedinim vrijednostima slučajne promjenljive pre nego što sprovedemo statistički eksperiment

Funkcija raspodjele vjerovatnoće za diskretnu slučajnu promjenljivu

- **ZAKON raspodjele vjerovatnoće diskretne slučajne promjenljive** je pravilo po kojem se svakoj vrijednosti x_k slučajne promjenljive **X** dodjeljuje odgovarajuća vjerovatnoća $p_k = P(X=x_k)$, a može se zapisati:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_k), & x = x_k \in S(X) \\ 0, & x \neq x_k \in S(X) \end{cases}$$

- Ova se funkcija još zove i zakon vjerovatnoće slučajne promjenljive X.
- **FUNKCIJA (ili kumulativni zakon) raspodjele vjerovatnoće** se označava sa ***F(x)*** i predstavlja funkciju, odnosno pravilo po kojem se može obračunati vjerovatnoća da slučajna promjenljiva ***X*** uzme vrijednost manju od vrijednosti ***x*** (tekuća promjenljiva), odnosno ***P(X<x)***

$$F(X) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Kod diskretne promjenljive se ova funkcija može zapisati i kao:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & za\ x \leq x_1 \\ p_1, & za\ x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2, & za\ x_2 < x \leq x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}, & za\ x_{n-1} < x \leq x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & \\ 1, za\ x > x_n & \end{cases}$$

U literaturi se ova funkcija može definisati i kao

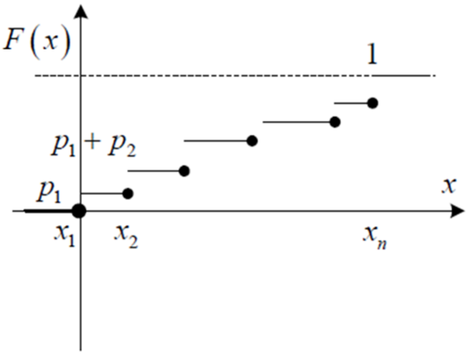
$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

ali se onda mijenja i njen zapis (postaje neprekidna sdesna):

$$F(X) = \begin{cases} 0, & za\ x < x_1 \\ p_1, & za\ x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & za\ x_2 \leq< x < x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}, & za\ x_{n-1} \leq x < x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & \\ 1, za\ x \geq x_n & \end{cases}$$

Funkcija raspodjele vjerovatnoće za diskretnu slučajnu promjenljivu

- **osobine funkcija raspodjele vjerovatnoće:**
  - neopadajuća funkcija: ako je ***a<b***, onda je ***F(a) ≤ F(b)*** *
  - nenegativna i normirana: ***0 ≤ F(x) ≤ 1***
  - neprekidna slijeva u tačkama prekida: ***F(x-0)=F(x)***
- Svaka funkcija koja zadovoljava ove osobine može da se smatra funkcijom raspodjele neke slučajne promjenljive.
- Grafik funkcije raspodjele



- Sa slike se može vidjeti da funkcija rasporeda skokovito mijenja vrijednosti za cjelobrojne vrijednosti slučajne promjenljive, pa se na osnovu samog izgleda grafika lako može uočiti diskretna priroda slučajne promjenljive.

* Neka je a<b. Ako sa A označimo događaj da je X<a, sa B događaj da je X<b, i sa C događaj a≤X<b, tada možemo zapisati B=A+C, pri čem se događaji A i C međusobno isključuju, pa vjerovatnoću zbira događaja, možemo napisati kao zbir vjerovatnoća_

P(B)=P(A+C)=P(A)+P(C), odakle je P(C)=P(B)-P(A), odnosno

P(a≤X<b)=P(X<b)-P(X<a)=**F(b)-F(a)≥0** , jer vjerovatnoća P(a≤X<b) ne može biti negativan broj.

Ima beskonačno mnogo slučajnih promjenljivih koje imaju istu funkciju raspodjele (na primjer slučajna promjenljiva X koja može uzeti vrijednosti 1 i 0 sa vjerovatnoćama 1/2 i slučajna promjenljiva Y=X^2 imaju istu funkciju raspodjele;

$$F(x) = \begin{cases} 0, za\ x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, za\ 0 < x \leq 1 \\ 1\ za\ x > 1 \end{cases}$$

Grafik funkcije raspodjele sastoji se samo od horizontalnih linija. Vertikalne linije nisu deo funkcije rasporeda, ali se obično uključuju da bi grafik bio pregledniji. Sa slike se može vidjeti da funkcija rasporeda skokovito mijenja vrijednosti za cjelobrojne vrijednosti slučajne promjenljive, pa se na osnovu samog izgleda grafika lako može uočiti diskretna priroda slučajne promjenljive

Funkcija raspodjele vjerovatnoće za diskretnu slučajnu promjenljivu

- **Primjer 4** Eksperiment je bacanje tri novčića. Neka je karakteristika eksperimenta, odnosno slučajna promjenjiva X-Broj palih grbova. Napisati raspodjelu vjerovatnoća slučajne promjenljive X i definisati funkciju raspodjele vjerovatnoće ove promejnljive.
- Rješenje: Skup elementarnih događaja je S={ PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG}. Broj palih grbova može biti: 0,1,2 ili 3, pa je X(S)={0,1,2,3}- skup vrijednosti slučajne promjenjive X (konačan niz brojeva), a vjerovatnoće odgovaraju vjerovatnoći da u bacanju bude ostvaren događaj pojave: 0 grbova (za $x_0=0$), 1 grb (za $x_1=1$), 2 grba (za $x_2=2$), 3 grba (za $x_3=3$).
- **Raspodjela vjerovatnoća slučajne promjenljive X** data u tabeli:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & za\ x \leq 0 \\ \frac{1}{8} za\ 0 < x \leq 1 \\ \frac{4}{8} za\ 1 < x \leq 2 \\ \frac{7}{8} za\ 2 < x \leq 3 \\ 1 & za\ x > 3 \end{cases}$$

Broj grbova (x_k)	**0**	**1**	**2**	**3**
Vjerovatnoća	1/8	3/8	3/8	1/8

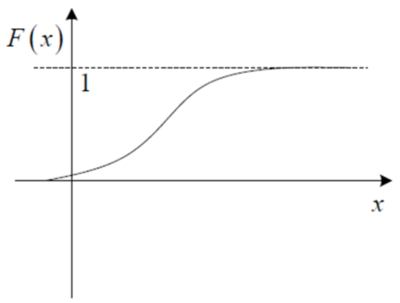
Funkcija raspodjele vjerovatnoće za neprekidnu slučajnu promjenljivu

B. Neprekidna (kontinualna) slučajna promjenljiva može da uzme sa pozitivnom vjerovatnoćom proizvoljnu brojnu vrijednost na određenom intervalu (ovaj interval može biti i cio skup R).

- Funkcija raspodjele vjerovatnoće se može definisati i za neprekidnu promjenljivu

$$F(X) = P(X < x)$$

- pri čemu je ova funkcija neprekidna, neopadajuća funkcija koja ispunjava uslove F(-∞)=0, i F(∞)=1.
- Stepenasta forma ove funkcije (za slučaj diskretne promjenljive) prelazi u neprekidnu funkciju za slučaj neprekidne slučajne promjenljive.

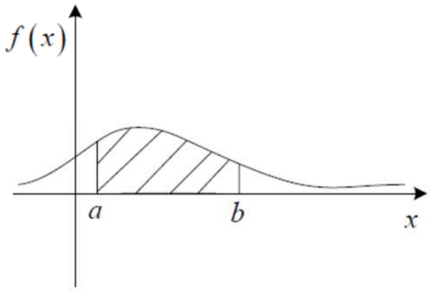


Kao što smo već rekli, raspored vjerovatnoća prekidne slučajne promjenljive prikazujemo listom parova vrijednosti slučajne promjenljive i odgovarajućih vjerovatnoća, dok je za neprekidnu slučajnu promjenljivu ovu listu nemoguće sastaviti jer je broj njenih vrijednosti beskonačan. Zbog toga nema ni smisla govoriti o vjerovatnoći da slučajna promjenljiva X uzme jednu određenu vrijednost P(X = x), budući da je zbog beskonačno mnogo vrijednosti ova vjerovatnoća jednaka nuli za svako x, P(X = x)=0. Dakle, kod neprekidne slučajne promjenljive ima smisla određivati samo vjerovatnoću da se X nalazi u nekom intervalu.

Kod neprekidne funkcije, nemoguće je svakom elementu x iz intervala (a,b) dodijeliti pozitivnu vjerovatnoću, jer bi njihov zbir bio beskonačan, a zbir vjerovatnoća skupa vrijednosti promjenljive X mora biti jednak 1. Zato se uzima da je $P(X = x) = 0$.
Prividno ovo je paradoks. Međutim, ovakvi paradoksi postoje u nauci. U geometriji duž ima pozitivnu dužinu, a dužina svake tačke je 0. U mehanici, telo čija masa postoji, a masa svakog pojedinog dela je nula.
Jednakost $P(X = x) = 0$ ne znači da će da se u praksi događaj $X = x$ nikada neće ostvariti, već samo da je mala, veoma mala vjerovatnoća da će se on ostvariti. To je prihvatljivo, jer slučajna promjenljiva X može da uzme bilo koju vrijednost sa intervala (a,b), a njih je neprebrojivo mnogo, pa su mali izgledi
da da uzme baš vrijednost x .

Gustina raspodjele vjerovatnoće za neprekidnu slučajnu promjenljivu

- Neka je X slučajna promenljiva i F (x) njena funkcija raspodjele.
- Kako je funkcija raspodjele slučajne promjenljive neprekidna i neopadajuća funkcija onda postoji funkcija f, takva da je $f(x) = F'(x)$, i naziva se **funkcijom gustine (raspodjele vjerovatnoće).**



- **OSOBINE FUNKCIJE GUSTINE:**
- **1.** Kao izvod neopadajuće funkcije raspodjele $f(x) \geq 0$
- **2.** Za svako realno a, $P(X = a) = 0$
- **3.** $P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

- Funkcija gustine vjerovatnoće omogućava, kao i funkcija raspodjele, da se izračuna verovatnoća da se realizacija slučajne promjenljive nađe u nekom intervalu. Ta vjerovatnoća je jednaka površini koja je ograničena funkcijom gustine i granicama datog intervala.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Gustina raspodjele vjerovatnoće se moze oznacavati i na drugi nacin; p(x), g(x), φ(x))

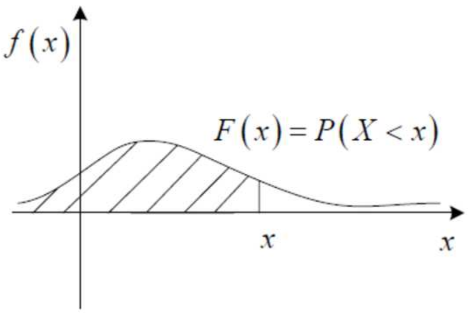
Gustina raspodjele vjerovatnoće za neprekidnu slučajnu promjenljivu

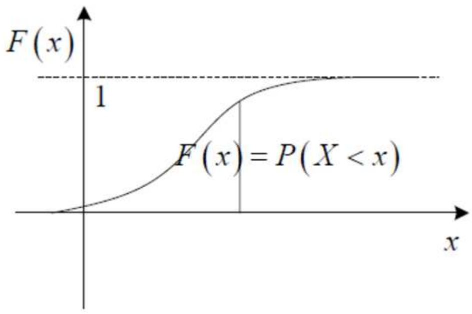
- Neka je F funkcija raspodjele slučajne promjenljive X. Ako postoji nenegativna funkcija f definisana na R takva da je

$$\mathrm{F(x)} = P(X < x) = p(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

onda je slučajna promjenljiva neprekidnog tipa

- Geometrijski, funkcija raspodjele F je površina ispod krive gustine, lijevo od tačke x.





Parametri ili brojne karakteristike slučajnih promjenljivih

- U praktičnim zadacima nije neophodno u potpunosti okarakterisati slučajnu promjenljivu, već samo putem pojedinih parametara koji karakterišuu bitne crte raspodjele vjerovatnoće:
  - parametri koji reprezentuju centar rasturanja vrijednosti slučajne promenljive
    - matematičko očekvanje,
    - medijana,
    - moda
  - parametri koji mjere to rasturanje oko centra rasturanja
    - srednje apsolutno odstupanje
    - varijansa (disperzija)
    - standardno odstupanje (devijacija)

Parametri koji reprezentuju centar rasturanja vrijednosti slučajne promjenljive

- **Centar rasturanja**: tačka na apscisnoj osi oko koje su vrijednosti odgovarajuće slučajne promjenljive rasturene, ali tako da se u njenoj neposrednoj blizini nalazi najveći broj ovih vrijednosti, a rjeđe što se udaljavamo lijevo i desno od centra rasturanja.
  - **a) matematičko očekivanje M(X)**, postoji ako navedeni red, odnosno integral konvergira
    - za diskretnu slučajnu promjenljivu: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \dots\dots & \boldsymbol{x_n} \\ \boldsymbol{p_1} & \boldsymbol{p_2} & \dots\dots & \boldsymbol{p_n} \end{pmatrix}$, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots . + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

    - za neprekidnu slučajnu promjenljivu: koja je definisana gustinom vjerovatnoće f(x):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

  - **b) medijana Me** je vrijednost slučajne promjenljive X za koju vjerovatnoća da slučajna promjenljiva uzme vrijednost manju od x iznosi 0,5, odnosno:

F(Me)=P(X<Me)=0,5

  - **a) moda Mo je :**
    - za diskretnu slučajnu promjenljivu: najvjerovatnija vrijednost slučajne promjenljive X , odnosno pi=max
    - za neprekidnu slučajnu promjenljivu koja je definisana gustinom vjerovatnoće f(x), to je tačka u kojoj ova funkcija ima maksimum

Matematičko očekivanje se moze oznacavati i na drugi nacin; E(X), μ

Neke osobine matematičkog očekivanja

- matematičko očekivanje konstante je konstanta M(C)=C
- matematičko očekivanje proizvoda slučajne promjenljive i konstante jednako je proizvodu te konstante i matematićkog očekivanja slučajne promjenljive
$$M(C\cdot X) = C\cdot M(X)$$
- matematičko očekivanje zbira slučajnih promjenljivih X i Y jednako je zbiru njihovih matematičkih očekivanja
$$M(X+Y)= M(X)+M(Y)$$
- matematičko očekivanje proizvoda nezavisnih slučajnih promjenljivih jednako je proizvodu njihovih matematičkih očekivanja
$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$$

Matematičko očekivanje

- **Primjer 5.:** Neka je X slučajna promjenljiva definisana kao broj koji pokazuje gornja strana kockice prilikom bacanja. Treba izračunati njeno matematičko očekivanje.
- Rješenje: Raspodjela vjerovatnoće ove slučajne promenljive data je sa:

  $x_k \in \{1,2,3,4,5,6\}$, p_k=1/6, za svako k=1,.....6

  - Matematičko očekivanje je:

    $$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

- **Primjer 6:** : Događaj A se ostvaruje sa vjerovatnoćom 1/4. Neki čovjek se kladi na taj događaj na sljedeći način: ulaže 1 dinar, s tim što gubi svoj ulog ako se događaj A ne ostvari, a dobija 3 dinara (dakle, svoj ulog i još dva dinara) ako se događaj A ostvari. Da li se isplati ovakva opklada?
- Rješenje: Neka je slučajna promenljiva X broj dobijenih dinara. Dobitak može da iznosi 2 dinara ili -1 dinar, pa X uzima vrednosti iz skupa {2, -1} sa vjerovatnoćama ¼ i ¾. Očekivana vrijednost dobitka je

  $$M(X) = 2\cdot\frac{1}{4} + (-1)\cdot\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

  Zaključujemo da je ova opklada nepovoljna (ne isplati se), jer je M(X)<0

Matematičko očekivanje

- **Primjer 7:** Odrediti matematičko očekivanje za slučajnu promenljivu X koja ima gustinu raspodjele vjerovatnoće definisanu sa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2 - 4x + 5), za\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0, za\ ostale\ vrijednosti\ x \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{3}{8}\int_{1}^{3}(x^3 - 4x^2 + 5x)dx = 2$$

Parametri koji mjere rasturanje vrijednosti slučajne promjenljive oko centra rasturanja

A. **srednje apsolutno odstupanje** slučajne promjenljive ***X*** u odnosu na broj ***a*** *je matematičko očekivanje apsolutnog odstupanja |***x-a***|

$$\theta_z = M|X-a| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - a| \cdot p_k$$, za diskretnu promjenljivu

$$\theta_z = M|X-a| = \int_{-\infty}^{\infty} |x-a| f(x)dx$$, za neprekidnu promjenljivu

za a=Me je θ_z najmanje

B. **varijansa V(X) ili σ_x^2 , odnosno disperzija D(X)** je matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promjenljive X od matematičkog očekivanja M(X), od

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{k=1}^{n} [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k$$, za diskretnu promjenljivu

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$, za neprekidnu promjenljivu

C. **standardno odstupanje (standardna devijacija)**

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

C. **koeficijent** varijacije je relativna mjera rasturanja

$$k_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\%$$

* najcesce se trazi srednje apsolutno ocekivanje u odnosu na medijanu ***Me*** (to je ona vrijednost promjenljive X za koju je vjerovatnoca X<Me jednaka 0,5)

Neke osobine varijanse

- varijansa konstante jednaka je nuli, $V(C)=0$

- varijansa proizvoda slučajne promjenljive i konstante jednaka je proizvodu kvadrata te konstante i varijanse slučajne promjenljive

$$V(C \cdot X) = C^2 \cdot V(X)$$

- varijansa zbira slučajnih promjenljivih X i Y jednaka je zbiru njihovih varijansi

$$V(X+Y)= V(X)+V(Y)$$

Varijansa i standardna devijacija

- **Primjer 8:** Izračunati disperziju i standardnu devijaciju slučajne promjenljive X sa raspodjelom:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

<u>Rješenje:</u>

matematičko očekivanje: $M(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

varijansa (disperzija)

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = M\left[X - \frac{5}{8}\right]^2 = \sum_{k=1}^{3}[x_k - 5/8]^2 \cdot p_k =$$

$$(0 - \frac{5}{8})^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} = 31/64$$

standardno odstupanje (standardna devijacija)

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{31}{64}} = 0{,}701$$

Varijansa i standardna devijacija

- **Primjer 9:** :Sračunati matematičko očekivanje, varijansu i standardnu devijaciju za slučajnu promjenljivu X, čija je gustina vjerovatnoće:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + 1\right), za\ 0 \le x \le 2 \\ 0, za\ ostale\ vrijednosti\ x \end{cases}$$

- matematičko očekivanje:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)dx = 10/9$$

- varijansa (disperzija)

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X - 10/9]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - 10/9)^2 f(x)dx =$$

$$\frac{1}{3}\int_{0}^{2}(x - 10/9)^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \frac{26}{81}$$

- standardna devijacija (standardno odstupanje)

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{26}{81} = 1/9}$$

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pergled, Beo
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pergled, Beograd, 1983
- Bruckler, F.M: Pierre de Fermat; Osječki matematički list 5(2005), 37–42
- http://www.e-statistika.rs
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Tomič, V.: Elementi verovatnoće u srednjoj školi, (master rad), http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/matematika/VojinTomic.pdf